

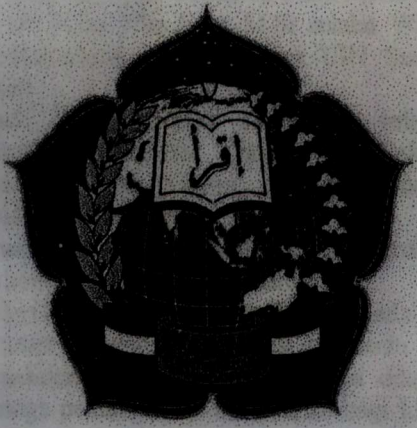
Laporan Penelitian

**Pengenalan Pola Huruf Kapital  
Tulisan Tangan Dengan  
Analisis Diskriminan  
Linier 2-Dimensi  
Simetris**

Karya Ilmiah untuk Melengkapi Syarat Pengajuan Edukatif  
Pada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sumatera Utara  
Program Studi Matematika

Oleh:

**Rina Widyasari, M.Si**  
NIDN. 9901121977



**PRODI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUMATERA UTARA  
MEDAN  
2017**

## KATA PENGANTAR

**Bismillahirrahmanirrahim...**

Dengan segala kerendahan hati, penulis sampaikan puji syukur kepada Allah SWT berkat Rahmat dan Hidayah-Nya memberi kesehatan, pengetahuan dan kesempatan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan penelitian ini yang berjudul **“Pengenalan Pola Huruf Kapital Tulisan Tangan dengan Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi Simetris”**.

Dalam menyelesaikan penelitian ini banyak bantuan bimbingan dari berbagai pihak, baik berupa materil, spiritual, maupun informasi. Sehingga penelitian ini dapat diselesaikan. Maka selayaknya penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. H.M. Jamil, MA selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sumatera Utara Medan
2. Ibu Dr. Rina Filia Sari, M.Si selaku Wakil Dekan I Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sumatera Utara Medan
3. Bapak Dr. Sajaratud Dur, MT selaku Kaprodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sumatera Utara Medan sekaligus Konsultan pada penelitian ini
4. Bapak / ibu rekan-rekan dosen tetap Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sumatera Utara Medan

Menyadari kekurangan dan keterbatasan pada penelitian ini, maka penulis tetap mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak agar penelitian ini dapat dikembangkan dikemudian hari. Akhir kata semoga penelitian ini bermanfaat bagi kita semua dan Semoga Allah SWT berkenan memberkan berkahnya sehingga semua harapan dan cita-cita penulis dapat terkabulkan. Amin

Medan, Oktober 2017

**Rina Widyasari, M.Si**



## REKOMENDASI

KATA Setelah membaca dan menelaah hasil penelitian yang berjudul **"Pengenalan Pola Huruf Kapital Tulisan Tangan dengan Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi Simetris"**. Yang dilakukan oleh Rina Widyasari, M.Si maka saya berkesimpulan bahwa hasil penelitian ini dapat diterima sebagai karya tulis berupa hasil penelitian. Demikianlah rekomendasi diberikan kepada yang bersangkutan untuk dapat dipergunakan sebagaimana mestinya.

Medan, April 2018  
Konsultan

Dr. Rina Filia Sari, M.Si  
NIP. 197703012005012002

## DAFTAR ISI

<b>KATA PENGANTAR</b>	ii
<b>REKOMENDASI</b>	iii
<b>DAFTAR ISI</b>	iv
<b>ABSTRAK</b>	vi
<b>BAB 1. PENDAHULUAN</b>	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Luaran Penelitian	4
<b>BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA</b>	5
2.1 Pengenalan Pola secara Statistika	5
2.2 Analisis Diskriminan Linier	8
2.3 Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi	10
<b>BAB 3. HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	15
3.1 Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi Simetris	15
3.2 Aplikasi Penggunaan Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi Simetris	22
<b>BAB 4. KESIMPULAN DAN RISET LANJUTAN</b>	35
4.1 Kesimpulan	35
4.2 Riset Lanjutan	35
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	36



## ABSTRAK

Pengenalan Pola secara Statistika (*Statistical Pattern Recognition*) merupakan suatu sistem yang bertujuan mengklasifikasi objek-objek ke dalam kategori-kategori atau kelas-kelas. Jika diberikan suatu matriks data  $A$ ,  $A = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k\}$ , dimana  $\Pi_i$  memuat  $n_i$  titik data dari kelas ke  $-i$  maka pola-pola yang terdapat pada masing-masing kelas dapat diklasifikasi dan dapat dilihat jarak pemisahan antar kelas dan dalam kelas himpunan data tersebut. Pada penelitian ini digunakan Analisis Diskriminan Linier Dua-Dimensi Simetris sebagai metode pengklasifikasian yang tujuannya memaksimumkan jarak matriks sebaran antar-kelas ( $S_b$ ) dan meminimumkan jarak matriks sebaran dalam-kelas ( $S_w$ ), dan dapat mengatasi masalah keraguan yang ditimbulkan pada matriks gambar yang tidak simetris ( $X_i \neq X_i^T$ ), dimana  $S_w$  dan  $S_b$  terdefinisi ganda. Penelitian ini ditujukan pada pengenalan pola huruf kapital simetris tulisan tangan seperti A, B, C, D, E, H, I, K, M, O, S, U, V, W, dan Y dengan menggunakan algoritma ADL2-D Simetris yang akan menghasilkan klasifikasi yang akurat dan lebih efisien.

**Kata Kunci:** Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi Simetris, Pengenalan Pola, Huruf Kapital Tulisan Tangan

## BAB 1

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Pengenalan pola atau dikenal dengan sebutan *pattern recognition* merupakan salah satu cabang sains yang pada dasarnya adalah suatu sistem yang bertujuan mengklasifikasi objek-objek ke dalam kategori-kategori atau kelas-kelas (Theodoridis, 2003) berdasarkan baik pada *apriori* pengetahuan atau pada informasi statistik yang diambil dari pola. Pola-pola tersebut biasanya diklasifikasikan ke dalam kelompok pengukuran atau pengamatan yang juga menentukan titik-titik ruang multidimensi yang tepat. Suatu sistem pengenalan pola yang lengkap terdiri atas suatu sensor yang mengumpulkan pengamatan untuk diklasifikasi atau digambar, suatu skema mekanisme ekstraksi fitur yang menghitung informasi numerik atau simbolik dari pengamatan, dan skema klasifikasi atau deskripsi yang mengklasifikasikan atau mendeskripsikan pengamatan dengan mengandalkan fitur yang diekstraksi (Wikipedia, 22 Februari 2010).

Desain dari sebuah sistem pengenalan pola terdiri atas tiga aspek sebagai berikut:

1. akuisisi data dan pre-proses
2. representasi data, dan
3. pengambilan keputusan

Proses pada sistem pengenalan pola dimulai dari pemilihan pola sebagai sensor kemudian pola-pola tersebut masuk ke teknik pemrosesan, bagian representasi, dan terakhir adalah proses pemodelan pembuatan keputusan. Dalam hal ini, empat pendekatan terbaik yang dikenal untuk pengenalan pola ialah:

1. pencocokan template (template matching)
2. klasifikasi statistik
3. sintaktis atau pencocokan struktur, dan
4. jaringan saraf tiruan



Model-model ini tidak independen dan kadang memiliki metode pengenalan pola yang sama dengan perbedaan interpretasi (Jain *et. al*, 2000).

Pada pengenalan pola terdapat bagan klasifikasi yang digunakan untuk mengelompokkan data. Bagan klasifikasi yang digunakan dalam penelitian ini akan menggunakan pendekatan statistik. Pengenalan pola secara statistik didasarkan pada pola-pola karakterisasi statistik, dengan asumsi bahwa pola-pola yang dihasilkan merupakan suatu sistem probabilitas.

Fukunaga (1990) dalam tulisannya menyajikan cara-cara dasar perhitungan matematika untuk proses pembuatan keputusan secara statistik dalam pengenalan pola. Tujuan utama *pattern recognition* adalah mengklarifikasikan mekanisasi sulit yang sering ditemukan dalam dunia sehari-hari seperti langkah dalam permainan catur didasarkan pada pola yang ada di papan catur, pembelian atau persediaan penjualan diputuskan melalui suatu pola informasi yang kompleks.

Beragam algoritma dapat diterapkan untuk pengenalan pola. Salah satunya yaitu Analisis Diskriminan Linier yang selanjutnya disingkat penulis dengan ADL telah sukses diaplikasikan dalam visualisasi komputer. Sebagai suatu pendekatan analisis subruang untuk mempelajari struktur berdimensi rendah data berdimensi tinggi, ADL mencari suatu himpunan vektor-vektor yang memaksimumkan Criterion Fisher Discriminant. Metode ini secara simultan meminimumkan sebaran dalam kelas ( $S_w$ ) dan memaksimumkan sebaran antar kelas ( $S_b$ ) dalam proyeksi fitur ruang vektor.

$$S_w = \sum_{i=1}^c \sum_{X_k \in X_i} [X_k - \mu_i][X_k - \mu_i]^T \quad S_b = \sum_{i=1}^c N_i [\mu_i - \mu][\mu_i - \mu]^T$$

dimana  $N_i$  adalah jumlah sampel pada kelas  $X_i$ , dan  $\mu_i$  adalah image rata-rata dari kelas  $X_i$ , dan  $\mu$  adalah rata-rata keseluruhan. Rumus rata-rata kelas dan rata-rata keseluruhan adalah sebagai berikut:

$$\mu_i = \frac{1}{N_i} \sum_{x \in \Pi_i} x \quad \text{adalah mean (rata-rata) dari kelas ke-i, dan} \quad \mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \Pi_i} x$$

adalah rata-rata keseluruhan (Fukunaga, 1990).



Sebelumnya, Ye *et. al* (2004) memperkenalkan suatu order bebas (independen) ADL2-D dengan suatu solusi algoritma iterasi. Mereka mempertimbangkan proyeksi data ke dalam suatu ruang yang merupakan produk tensor dalam 2 vektor ruang. Meskipun metode ADL2-D lebih baik dibandingkan metode ADL klasik, namun menyisakan suatu problem mendasar yang tidak terpecahkan. Untuk vektor 1-Dimensi matriks sebaran antar kelas maupun matriks sebaran dalam kelas didefinisikan tunggal. Untuk matriks 2-Dimensi seperti gambar, dan pada umumnya gambar bersifat tidak simetris  $X_i \neq X_i^T$ , maka matriks sebaran antar kelas maupun matriks sebaran dalam kelas didefinisikan tidak tunggal yakni

$$S_b(XX^T) \neq S_b(X^T X), \quad S_w(XX^T) \neq S_w(X^T X),$$

sehingga terdapat sejumlah pilihan-pilihan yang mungkin untuk menentukan fungsi objektif ADL yang tepat.

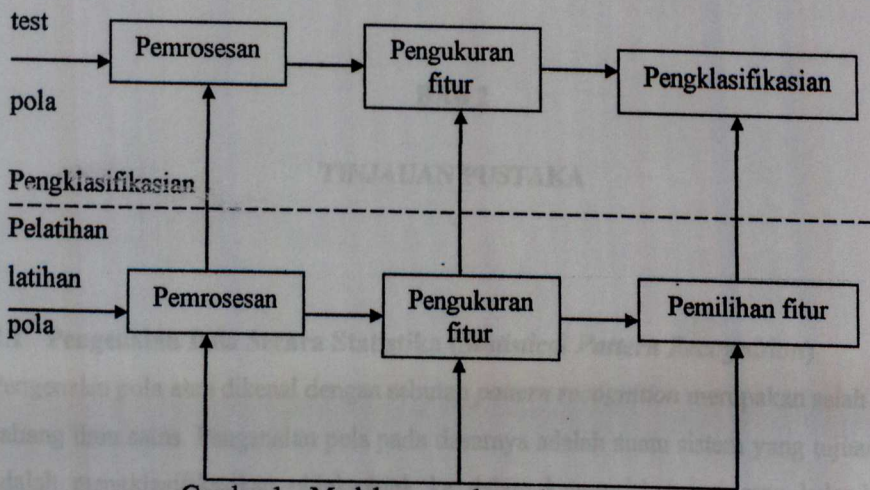
Pengenalan pola huruf kapital tulisan tangan adalah salah satu aplikasi dari analisis diskriminan linier 2-dimensi simetris. Penulisan huruf kapital dalam standar baku yang digunakan dalam proses pengenalan pola ini yaitu huruf A, B, C, D, E, H, I, K, M, O, S, U, V, W dan Y.

## 1.2 Perumusan Masalah

1. Bagaimanakah proses pengenalan pola huruf kapital tulisan tangan dengan analisis diskriminan linier dimensi 2-simetris?
2. Apakah hasil pengklasifikasian dengan analisis diskriminan linier 2-dimensi simetris lebih baik dari Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi biasa?



Bagan pengenalan dan pengklasifikasian pola berikut (Jain *et. al*, 2000).



Gambar 1 : Model pengenalan pola secara statistik

### 1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian yakni untuk menentukan fungsi objektif optimum ADL2-D Simetris dan algoritma untuk mengatasi masalah keraguan yang terdapat pada ADL2-D biasa.

### 1.4 Manfaat Penelitian

1. Memberikan manfaat bagi pembaca untuk lebih mengetahui dan memahami tentang pengenalan pola secara statistika dengan pendekatan Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi Simetris yang juga dapat digunakan dalam pengklasifikasian data.
2. Dapat diaplikasikan dalam pengenalan wajah atau klasifikasi objek dalam visualisasi komputer.

### 1.5 Luaran Penelitian

Hasil penelitian diterbitkan dalam jurnal ilmiah ber-ISSN yaitu jurnal ZERO Matematika.





## BAB 2

### TINJAUAN PUSTAKA

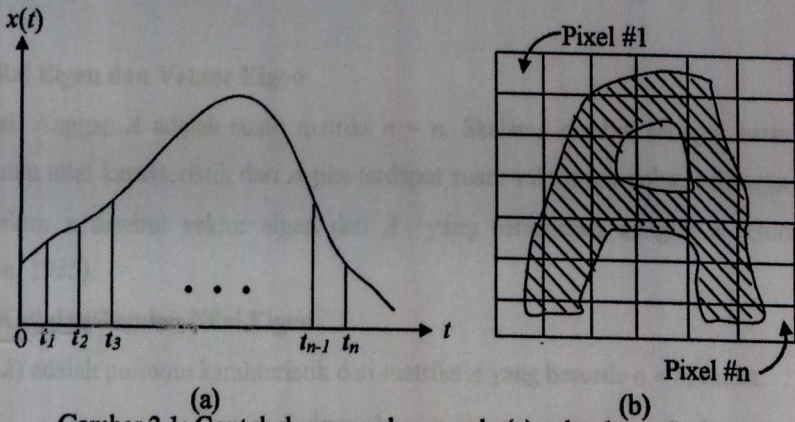
#### 2.1 Pengenalan Pola Secara Statistika (*Statistical Pattern Recognition*)

Pengenalan pola atau dikenal dengan sebutan *pattern recognition* merupakan salah satu cabang ilmu sains. Pengenalan pola pada dasarnya adalah suatu sistem yang tujuannya adalah mengklasifikasikan objek-objek ke dalam kategori-kategori atau kelas-kelas (Theodoridis, 2003), berdasarkan baik pada *apriori* pengetahuan atau pada informasi statistik yang diambil dari pola.

Fukunaga (1990) menyajikan cara-cara dasar perhitungan matematika untuk proses pembuatan keputusan secara statistik dalam pengenalan pola. Tujuan utama *pattern recognition* adalah mengklarifikasikan mekanisasi sulit yang sering ditemukan dalam dunia sehari-hari seperti langkah dalam permainan catur didasarkan pada pola yang ada di papan catur, pembelian atau persediaan penjualan diputuskan melalui suatu pola informasi yang kompleks. Sebagian besar aplikasi-aplikasi penting dalam *pattern recognition* dikarakterkan ke dalam satu bentuk kurva atau pola gambar geometri. Sebagai contoh, pengetesan suatu mesin layak atau tidak menampilkan pola berbentuk kurva. Masalah ini mereduksi untuk pemisahan kurva dari mesin yang bagus dan yang tidak bagus. Pada contoh lain, pengenalan pola huruf hasil cetak tulisan tangan diklasifikasikan dalam bentuk gambar geometri.

Dalam proses untuk pengklasifikasiannya, pertama kita ukur karakteristik-karakteristik pengamatan dari sampel. Ekstraksi seluruh informasi yang terdapat dalam sampel untuk menghitung nilai sampel-waktu untuk suatu pola berbentuk kurva, , dan tingkat kehitaman dari piksel untuk suatu figur, seperti yang ditunjukkan dalam gambar 2.1.





Gambar 2.1: Contoh dua pengukuran pola (a) gelombang (b) huruf

Karena input dari pengenalan pola merupakan suatu vektor acak dengan  $n$  peubah, maka, baik untuk pola berbentuk gelombang ataupun huruf, keduanya diekspresikan ke dalam bentuk vektor dalam suatu ruang dimensi- $n$ . Sebagai contoh, pengamatan  $x(i)$  bervariasi dari huruf A yang satu ke huruf A yang lainnya dan oleh karena itu,  $x(i)$  merupakan suatu variabel acak, dan  $X$  merupakan vektor acak.

#### A. Matriks Kovarians

Matriks kovarians  $X$  didefinisikan sebagai berikut:

$$S = E [X_i - M_i] [X_i - M_i]^T \quad (\text{Fukunaga, 1990}) \quad (1)$$

$X_i$  adalah data pada masing-masing kelas,  $M_i$  adalah rata-rata kelas ke- $i$

Jika  $A_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]^T$  mempunyai rata-rata kelas, maka untuk melihat betapa dekatnya korelasi antar kelas, harus diatur agar masing-masing nilai mempunyai jumlah selisih rata-rata sama dengan 0, yaitu dengan cara mengurangi setiap  $a_i$  dengan rata-rata kelasnya. Kemudian menempatkan nilai-nilai tersebut ke dalam sebuah matriks seperti berikut

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} - M_1 & \dots & a_{1n} - M_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - M_1 & \dots & a_{nn} - M_n \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} a_{11} - M_1 & \dots & a_{1n} - M_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - M_1 & \dots & a_{nn} - M_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11} - M_1 & \dots & a_{1n} - M_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - M_1 & \dots & a_{nn} - M_n \end{pmatrix} \quad (2)$$



## B. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

**Definisi.** Anggap  $A$  adalah suatu matriks  $n \times n$ . Skalar  $\lambda$  disebut sebagai suatu nilai eigen atau nilai karakteristik dari  $A$  jika terdapat suatu vektor tak nol  $\mathbf{x}$ , sehingga  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ . Vektor  $\mathbf{x}$  disebut vektor eigen dari  $A$  yang berasosiasi dengan  $\lambda$  (Horn and Johnson, 1985).

### Hasil Kali dan Jumlah Nilai Eigen

Jika  $p(\lambda)$  adalah polinom karakteristik dari matriks  $A$  yang berorde  $n \times n$ , maka

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \quad (3)$$

Dengan menguraikan determinan sepanjang kolom pertama, diperoleh

$$\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda) \det(M_{11}) + \sum_{i=2}^n a_{1i} (-1)^{i+1} \det(M_{1i})$$

di mana minor-minor  $M_{ii}$ ,  $i = 2, \dots, n$  tidak mengandung kedua elemen diagonal  $(a_{ii} - \lambda)$ . Dengan menguraikan  $\det(M_{11})$  dengan cara yang sama, dapat disimpulkan bahwa

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) \quad (4)$$

adalah satu-satunya suku dalam ekspansi  $\det(A - \lambda I)$  yang menyebabkan suatu hasil kali lebih dari  $n - 2$  elemen diagonal. Jika persamaan (2.7) diuraikan, maka koefisien dari  $\lambda^n$  akan menjadi  $(-1)^n$ . Jadi, koefisien utama dari  $p(\lambda)$  adalah  $(-1)^n$  dan dengan demikian jika  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  adalah nilai-nilai eigen dari  $A$ , maka

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \quad (5)$$

$$= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

Dari persamaan (3) dan (5) maka diperoleh

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = p(0) = \det(A)$$



Dari persamaan (4), juga diperoleh  $\sum_{i=1}^n a_{ii}$  sebagai koefisien dari  $(-\lambda)^{n-1}$ . Jika dengan persamaan (5)  $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ . Dengan demikian, maka

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Jumlah elemen diagonal dari  $(A)$  dinamakan *trace* dari  $A$ , dan dilambangkan dengan  $\text{tr}(A)$  (Horn and Johnson, 1985).

## 2.2 Analisis Diskriminan Linier (ADL)

Analisis diskriminan adalah teknik statistik multivariat yang terkait dengan pemisahan (*separating*) atau alokasi/klasifikasi (*classification*) sekelompok objek atau observasi ke dalam kelompok (*group*) yang telah terlebih dahulu didefinisikan. Dalam tujuan pengenalan objek (observasi), metode ini mencoba menemukan suatu '*discriminant*' yang nilainya secara numeris sedemikian sehingga mampu memisahkan objek yang karakteristiknya telah diketahui. Sedangkan dalam tujuan klasifikasi objek, metode ini akan mensortir objek (observasi) ke dalam 2 atau lebih kelas (Fukunaga, 1990).

Jika diberikan suatu matriks data  $A \in R^{N \times n}$ , metode ADL klasik bertujuan menemukan suatu transformasi  $G \in R^{N \times l}$  yang memetakan setiap kolom  $a_i$  dari matriks  $A$ , untuk  $1 \leq i \leq n$ , dalam ruang dimensi  $N$  ke vektor  $b_i$  dalam ruang dimensi  $l$ . Yakni  $G : a_i \in R^{N \times n} \rightarrow b_i = G^T a_i \in R^l (l < N)$ . Dengan kata lain, ADL bertujuan menemukan suatu ruang vektor  $\mathcal{G}$  direntangkan oleh  $\{g_i\}_{i=1}^l$  di mana  $G = [g_1, g_2, \dots, g_l]$ , sehingga setiap  $a_i$  diproyeksikan ke  $\mathcal{G}$  oleh  $(g_1^T a_i, \dots, g_l^T a_i)^T \in R^l$  (Ye et. al, 2004).

Asumsikan bahwa data asli dalam  $A$  dipartisi ke dalam  $k$  kelas sehingga  $A = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k\}$ , dimana  $\Pi_i$  memuat  $n_i$  titik data dari kelas ke  $-i$ , dan  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ . ADL klasik bertujuan untuk menemukan transformasi optimal  $G$  sehingga struktur kelas dari data ruang berdimensi tinggi yang asli diubah ke dalam ruang berdimensi rendah (Ye et. al, 2004).

Dalam ADL, transformasi ke subruang yang berdimensi lebih rendah yaitu



$$y_i = G^T x_i \text{ (Luo et al, 2007)} \quad (6)$$

di mana  $G$  merupakan transformasi ke subruang. Sering juga dituliskan dengan  $(y_1, \dots, y_n) = G^T (x_1, \dots, x_n)$  atau  $Y = G^T X$ . Tujuan utama dari ADL adalah mencari nilai  $G$  sehingga kelas dapat lebih terpisah dalam ruang transformasi dan dengan mudah dapat dibedakan dari yang lainnya.

Dalam metode Analisis Diskriminan Linier, terdapat dua matriks sebaran yaitu matriks sebaran dalam-kelas disimbolkan dengan  $S_w$ , dan matriks sebaran antar-kelas disimbolkan dengan  $S_b$ , masing-masing didefinisikan sebagai berikut:

$$S_w = \sum_{i=1}^c \sum_{x_k \in \Pi_i} [x_k - m_i][x_k - m_i]^T \quad (7)$$

$$S_b = \sum_{i=1}^c n_i [m_i - m][m_i - m]^T \quad (8)$$

di mana  $n_i$  adalah jumlah sampel pada kelas  $x_i$ , dan  $m_i$  adalah image rata-rata dari kelas ke- $i$  dan  $m$  adalah rata-rata keseluruhan. Rumus rata-rata kelas dan rata-rata keseluruhan adalah sebagai berikut:

$$m_i = \frac{1}{n_i} \sum_{x \in \Pi_i} x \quad \text{adalah mean (rata-rata) dari kelas ke-} i, \text{ dan } m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^c \sum_{x \in \Pi_i} x$$

adalah rata-rata keseluruhan (Fukunaga, 1990).

Seperti diutarakan sebelumnya, metode Analisis Diskriminan Linier diharapkan dapat meminimumkan jarak dalam matriks sebaran dalam-kelas ( $S_w$ ) sementara jarak matriks sebaran antar-kelas ( $S_b$ ) dapat dimaksimumkan sehingga dapat terlihat perbedaan atau pemisahan antar kelas. Dalam hasil ruang dimensi yang lebih rendah dari transformasi linier  $G$  (atau proyeksi linier ke dalam ruang vektor  $\mathcal{G}$ ),  $S_b$  dan  $S_w$  menjadi

$$S_b(Y) = G^T S_b(X) G, \quad (9)$$

$$S_w(Y) = G^T S_w(X) G. \quad (10)$$

Transformasi optimal  $G$  akan memaksimumkan  $\text{trace}(S_b^L)$  dan meminimumkan  $\text{trace}(S_w^L)$ .



Optimisasi umum dalam Analisis Diskriminan Linier meliputi (lihat Fukunaga, 1990) :  
 $\max_G \{ \text{trace}((S_w^L)^{-1} S_b^L) \}$  dan  $\min_G \{ \text{trace}((S_b^L)^{-1} S_w^L) \}$  (11)

Hal ini dituliskan dalam fungsi objektif optimum:

$$\max_G J(G) = \text{tr} \frac{S_b(Y)}{S_w(Y)} = \text{tr} \frac{G^T S_b(X) G}{G^T S_w(X) G} \quad (12)$$

Catatan bahwa  $\text{trace}(A/B) = \text{trace}(B^{-1}A) = \text{trace}(AB^{-1})$

Masalah optimisasi dari persamaan (12) di atas ekivalen dengan masalah generalisasi nilai eigen berikut:  $S_b x = \lambda S_w x$ , untuk  $\lambda \neq 0$ . Penyelesaiannya dapat diperoleh dengan menerapkan eigen-dekomposisi ke matriks  $S_w^{-1} S_b x$  jika  $S_w$  nonsingular, atau  $S_b^{-1} S_w x$  jika  $S_b$  nonsingular. Terdapat paling banyak  $k - 1$  vektor-vektor eigen yang cocok ke nilai eigen tak nol, karena kedudukan dari matriks  $S_b$  dibatasi oleh  $k - 1$ . Oleh karena itu, dimensi yang direduksi oleh ADL klasik terletak pada  $k - 1$ .

## 2.2. Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi

Analisis Diskriminan Linier 2 Dimensi, perbedaan utama antara ADL klasik dan ADL2-D yang peneliti usulkan dalam penelitian ini adalah tentang perwakilan (representasi) data. ADL klasik menggunakan representasi vektor, sedangkan ADL2-D bekerja dengan data dalam representasi matriks. Dalam penggunaan metode ADL2-D akan terlihat bahwa representasi mengarah ke eigen-dekomposisi pada matriks dengan ukuran lebih kecil. Lebih khusus, ADL2-D melibatkan eigen-dekomposisi matriks dengan ukuran  $r \times r$  dan  $c \times c$ , yang jauh lebih kecil daripada matriks ADL klasik (Ye *et. al*, 2005).

Dalam ADL2-D telah disepakati bahwa suatu himpunan gambar disimbolkan dengan  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $X_i \in \mathbb{R}^{r \times c}$ . Dengan intuisi yang sama dengan ADL klasik, ADL2-D mencoba untuk mencari suatu transformasi bilinear

$$Y_i = L^T X_i R \quad (13)$$

sehingga kelas-kelas yang berbeda dipisahkan. Kuncinya adalah bagaimana memilih ruangbagian  $L$  dan  $R$  berdasarkan matriks sebaran dalam kelas dan antar kelas (Luo *et. al*, 2007).



Tidak seperti ADL klasik, ADL2-D menganggap hal berikut  $(l_1 \times l_2)$  - ruang dimensi  $L \otimes R$ , yang merupakan produk tensor dua ruang berikut:  $L$  direntang oleh  $\{u_i\}_{i=1}^{l_1}$  dan  $R$  direntangkan oleh  $\{v_i\}_{i=1}^{l_2}$ . Didefinisikan dua matriks  $L = [u_1, \dots, u_{l_1}] \in \mathbb{R}^{r \times l_1}$  dan  $R = [v_1, \dots, v_{l_2}] \in \mathbb{R}^{r \times l_2}$ . Kemudian proyeksi dari  $X \in \mathbb{R}^{r \times c}$  ke ruang  $L \otimes R$  adalah  $L^T X R \in \mathbb{R}^{l_1 \times l_2}$  (Ye et. al, 2004).

Misalkan  $A_i \in \mathbb{R}^{r \times c}$ , untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  adalah gambar (pola) dalam dataset, kemudian masing-masing pola dikelompokkan ke dalam  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$  dimana  $\Pi_i$  memiliki  $n_i$

gambar (pola). Misalkan  $M_i = \frac{1}{n_i} \sum_{x \in \Pi_i} X$  adalah rata-rata dari kelas ke- $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,

dan  $M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \Pi_i} X$  berarti rata-rata keseluruhan. Dalam 2DLDA, peneliti menganggap gambar sebagai sinyal dua dimensi dan bertujuan untuk menemukan dua matriks transformasi  $L \in \mathbb{R}^{r \times l_1}$  dan  $R \in \mathbb{R}^{r \times l_2}$  yang memetakan setiap anggota  $A_i \in \mathbb{R}^{r \times c}$  untuk  $1 \leq i \leq n$ , ke suatu matriks  $B_i \in \mathbb{R}^{l_1 \times l_2}$  sehingga  $B_i = L^T A_i R$ .

Sama halnya seperti ADL klasik, ADL2D bertujuan untuk mencari transformasi (proyeksi) optimal  $L$  dan  $R$  sehingga struktur kelas dari ruang berdimensi tinggi yang asli diubah ke ruang berdimensi rendah. Suatu kesamaan metrik alami antara matriks adalah norma Frobenius (Ye, et. al, 2004). Di bawah metrik ini kuadrat jarak dari *within-class* (dalam kelas) dan *between class* (antar kelas) dapat dihitung sebagai berikut:

$$D_w = \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \Pi_i} \|X - M_i\|_F^2, \quad D_b = \sum_{i=1}^k n_i \|M_i - M\|_F^2 \quad (14)$$

$\text{trace}(M M^T) = \|M\|_F^2$ , untuk suatu matriks  $M$ , maka diperoleh

$$D_w = \text{trace} \left( \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \Pi_i} \|X - M_i\|_F^2 \right) \quad (15)$$

$$D_b = \text{trace} \left( \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \Pi_i} \|X - M_i\|_F^2 \right) \quad (16)$$

Dalam ruang berdimensi rendah, hasil dari transformasi linier  $L$  dan  $R$ , jarak *within-class* dan *between class* menjadi:



$$\bar{D}_w = \text{trace} \left( \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \Pi_i} L^T (X - M_i) R R^T (X - M_i)^T L \right) \quad (17)$$

$$\bar{D}_b = \text{trace} \left( \sum_{i=1}^k n_i L^T (X - M_i) R R^T (X - M_i)^T L \right) \quad (18)$$

Transformasi optimal  $L$  dan  $R$  akan memaksimumkan  $\bar{D}_b$  dan meminimumkan  $\bar{D}_w$ , oleh karena kesulitan menghitung optimal  $L$  dan  $R$  secara simultan, berikut ini adalah algoritma untuk ADL2D. Lebih khususnya, untuk suatu  $R$  tetap, kita dapat menghitung optimal  $L$  dengan memecahkan permasalahan optimisasi yang sama dengan persamaan (12). Dengan menghitung  $L$ , kita kemudian dapat memperbaharui  $R$  dengan memecahkan masalah optimisasi lain sebagai satu-satunya penyelesaian dalam persamaan (12).

### Perhitungan L

Untuk suatu  $R$  tetap,  $\bar{D}_w$  dan  $\bar{D}_b$  dapat ditulis kembali sebagai

$$\bar{D}_w = \text{trace} (L^T S_w^R L), \quad \bar{D}_b = \text{trace} (L^T S_b^R L) \quad (19)$$

di mana

$$S_w^R = \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \Pi_i} (X - M_i) R R^T (X - M_i)^T, \quad S_b^R = \sum_{i=1}^k n_i (M_i - M) R R^T (M_i - M)^T \quad (20)$$

Sama seperti masalah yang terdapat pada persamaan (2.14), optimal  $L$  dapat dihitung dengan memecahkan masalah optimisasi berikut:  $\max_L \text{trace} ((L^T S_w^R L)^{-1} (L^T S_b^R L))$ . Penyelesaiannya dapat diperoleh dengan memecahkan masalah generalisasi nilai eigen berikut:  $S_w^R x = \lambda S_b^R x$ . Karena  $S_w^R$  secara umum adalah nonsingular, maka  $L$  optimum dapat diperoleh dengan menghitung suatu eigen-dekomposisi pada  $(S_w^R)^{-1} S_b^R$ . Catatan bahwa ukuran dari matriks  $S_w^R$  dan  $S_b^R$  adalah  $r \times r$  (matriks bujursangkar), yang ukurannya lebih kecil dibandingkan ukuran matriks  $S_w$  dan  $S_b$  dalam ADL klasik.

### Perhitungan R

Kemudian menghitung  $R$  untuk suatu  $L$  yang tetap.  $\bar{D}_w$  dan  $\bar{D}_b$  dapat ditulis kembali sebagai

$$\bar{D}_w = \text{trace} (R^T S_w^L R), \quad \bar{D}_b = \text{trace} (R^T S_b^L R) \quad (21)$$



$$S_w^L = \sum_{i=1}^k \sum_{X \in \Pi_i} (X - M_i)^T L L^T (X - M_i), \quad S_b^L = \sum_{i=1}^k n_i (M_i - M)^T L L^T (M_i - M) \quad (22)$$

Sama seperti masalah yang terdapat pada persamaan (12), optimal  $L$  dapat dihitung dengan memecahkan masalah optimisasi berikut:  $\max_R \text{trace}((R^T S_w^L R)^{-1} (R^T S_b^L R))$ . Penyelesaiannya dapat diperoleh dengan memecahkan masalah generalisasi nilai eigen berikut:  $S_w^L x = \lambda S_b^L x$ . Karena  $S_w^L$  secara umum adalah nonsingular, maka  $R$  optimum dapat diperoleh dengan menghitung suatu eigen-dekomposisi pada  $(S_w^L)^{-1} S_b^L$ . Catatan bahwa ukuran dari matriks  $S_w^L$  dan  $S_b^L$  adalah  $r \times r$  (matriks bujursangkar), yang ukurannya lebih kecil dibandingkan ukuran matriks  $S_w$  dan  $S_b$  dalam ADL klasik.

**Algoritma 2.2 ADL2D** ( $A_1, \dots, A_n, l_1, l_2$ )

**Input:**  $A_1, \dots, A_n, l_1, l_2$

**Output:**  $L, R, B_1, \dots, B_n$

1. Hitung rata-rata  $M_i$  dari kelas ke- $i$  untuk setiap  $i$  sebagai

$$M_i = \frac{1}{n_i} \sum_{X \in \Pi_i} X$$

2. Hitung rata-rata global  $M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{X \in \Pi_i} X$

3.  $R_0 \leftarrow (I_{l_2}, 0)^T$

4. Untuk  $j$  dari 1 sampai  $l_1$

5.  $S_w^R \leftarrow \sum_{i=1}^k \sum_{X \in \Pi_i} (X - M_i) R_{j-1} R_{j-1}^T (X - M_i)^T$

$$S_b^R \leftarrow \sum_{i=1}^k n_i (X - M_i) R_{j-1} R_{j-1}^T (X - M_i)^T$$

6. Hitung eigen vektor  $l_1$  pertama  $\{\phi_i^L\}_{i=1}^{l_1}$  dari  $(S_w^R)^{-1} S_b^R$

7.  $L_j \leftarrow \{\phi_1^L, \dots, \phi_{l_1}^L\}$

8.  $S_w^L \leftarrow \sum_{i=1}^k \sum_{X \in \Pi_i} (X - M_i)^T L_j L_j^T (X - M_i)$

$$S_b^L \leftarrow \sum_{i=1}^k n_i (X - M_i)^T L_j L_j^T (X - M_i)$$

9. Menghitung eigen vektor  $l_2$  pertama  $\{\phi_i^R\}_{i=1}^{l_2}$  dari  $(S_w^L)^{-1} S_b^L$



10.  $R_j \leftarrow \{\phi_1^R, \dots, \phi_{l_2}^R\}$
11. End for
12.  $L \leftarrow L_T, R \leftarrow R_l$
13.  $B_l \leftarrow L^T A_l R$ , untuk  $l=1, 2, \dots, n$
14. Return  $(L, R, B_1, \dots, B_n)$

(Ye, et.al, 2004)

Namun, dalam ADL2-D kita akan melihat ada suatu masalah keraguan yang sangat mendasar: Ada dua cara untuk mendefinisikan matriks sebaran dalam kelas  $S_w$

$$S_w(XX^T) = \sum_{j=1}^k \sum_{x_i \in \pi_j} (X_i - M_j)(X_i - M_j)^T \quad (23)$$

$$S_w(X^T X) = \sum_{j=1}^k \sum_{x_i \in \pi_j} (X_i - M_j)^T (X_i - M_j) \quad (24)$$

dan ada 2 cara untuk mendefinisikan matriks sebaran antar kelas  $S_b$

$$S_b(XX^T) = \sum_{j=1}^k n_j (M_j - M)(M_j - M)^T \quad (25)$$

$$S_b(X^T X) = \sum_{j=1}^k n_j (M_j - M)^T (M_j - M) \quad (26)$$

Oleh karena itu, dalam ruang transformasi, kita tuliskan

$$S_b(Y Y^T), S_b(Y^T Y),$$

$$S_w(Y Y^T), S_w(Y^T Y),$$

Pada umumnya, gambar tidak bersifat simetris:  $X_i \neq X_i^T$ , maka

$$S_b(Y Y^T)^1 S_b(Y^T Y),$$

$$S_w(Y Y^T) \neq S_w(Y^T Y),$$

Karena alasan ini, fungsi objektif ADL menjadi ambigu. Kita mempunyai sejumlah pilihan:

$$J_1 = \text{tr} \frac{S_b(Y Y^T)}{S_w(Y Y^T)} \quad (27)$$

$$J_2 = \text{tr} \frac{S_b(Y^T Y)}{S_w(Y^T Y)} \quad (28)$$

$$J_3 = \text{tr} \left[ \frac{S_b(YY^T)}{S_w(YY^T)} + \frac{S_b(Y^TY)}{S_w(Y^TY)} \right] \quad (29)$$

$$J_4 = \text{tr} \left[ \frac{S_b(Y^TY) S_b(YY^T)}{S_w(Y^TY) S_w(YY^T)} \right], \quad (30)$$

$$J_5 = \text{tr} \frac{S_b(YY^T) + S_b(Y^TY)}{S_w(YY^T) + S_w(Y^TY)}, \quad (31)$$

dan lain-lain.



## BAB 3

### HASIL PENELITIAN

#### 3.1 Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi Simetris (ADL2-D Simetris)

Telah diutarakan pada bab sebelumnya bahwa pendekatan pengklasifikasian dengan Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi (ADL2-D) menimbulkan masalah keraguan yang mendasar yaitu: Terdapat dua cara untuk mendefinisikan matriks sebaran dalam-kelas  $S_w$

$$S_w(\mathbf{XX}^T) = \sum_{j=1}^k \sum_{X_i \in \pi_j} (X_i - M_j)(X_i - M_j)^T$$

$$S_w(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^k \sum_{X_i \in \pi_j} (X_i - M_j)^T (X_i - M_j)$$

dan terdapat dua cara untuk mendefinisikan matriks sebaran antar-kelas  $S_b$

$$S_b(\mathbf{XX}^T) = \sum_{j=1}^k n_j (M_j - M)(M_j - M)^T$$

$$S_b(\mathbf{XX}^T) = \sum_{j=1}^k n_j (M_j - M)^T (M_j - M)$$

Oleh karena itu, dalam ruang transformasi dapat dituliskan

$$S_b(\mathbf{YY}^T), S_b(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}),$$

$$S_w(\mathbf{YY}^T), S_w(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}),$$

Pada umumnya, gambar tidak bersifat simetris:  $X_i \neq X_i^T$ , maka

$$S_b(\mathbf{YY}^T) \neq S_b(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}),$$

$$S_w(\mathbf{YY}^T) \neq S_w(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}),$$

Karena alasan ini, fungsi objektif ADL menjadi ambigu yakni menimbulkan sejumlah pilihan:

$$J_1 = \text{tr} \frac{S_b(\mathbf{YY}^T)}{S_w(\mathbf{YY}^T)}$$

$$J_2 = \text{tr} \frac{S_b(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})}{S_w(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})}$$

$$J_3 = \text{tr} \left[ \frac{S_b(\mathbf{Y} \mathbf{Y}^T)}{S_w(\mathbf{Y} \mathbf{Y}^T)} + \frac{S_b(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})}{S_w(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})} \right]$$

$$J_4 = \text{tr} \left[ \frac{S_b(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})}{S_w(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})} \frac{S_b(\mathbf{Y} \mathbf{Y}^T)}{S_w(\mathbf{Y} \mathbf{Y}^T)} \right],$$

$$J_5 = \text{tr} \frac{S_b(\mathbf{Y} \mathbf{Y}^T) + S_b(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})}{S_w(\mathbf{Y} \mathbf{Y}^T) + S_w(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})},$$

Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi Simetris dalam menyelesaikan masalah ambigu di atas. dimotivasi dengan suatu kunci pengamatan: jika gambar simetris, yakni  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1^T$ . maka

$$S_w(\mathbf{X} \mathbf{X}^T) = S_w(\mathbf{X}^T \mathbf{X}),$$

$$S_b(\mathbf{X} \mathbf{X}^T) = S_b(\mathbf{X}^T \mathbf{X}).$$

Penyelesaian masalah ini menggunakan suatu representasi data baru yaitu transformasi bilinear simetris.

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Y}_1^T \\ \mathbf{Y}_1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_1^T & 0 \end{pmatrix} \mathbf{\Gamma}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & 0 \end{pmatrix}$$

Pada Fukunaga(1990), matriks  $\mathbf{\Gamma}$  didefinisikan sebagai:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

yakni matriks yang diagonal utamanya merupakan nilai varians dari suatu data dan elemen yang lainnya 0.

Transformasi bilinear di atas ekuivalen dengan transformasi linier  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{L}^T \mathbf{X}_1 \mathbf{R}$ .

Penjabarannya yakni sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Y}_1^T \\ \mathbf{Y}_1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_1^T & 0 \end{pmatrix} \mathbf{\Gamma}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Y}_1^T \\ \mathbf{Y}_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_1^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & Y_i^T \\ Y_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & R^T \\ L^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & X_i \\ X_i^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ R & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & Y_i^T \\ Y_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^T X_i^T & 0 \\ 0 & L^T X_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ R & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & Y_i^T \\ Y_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & R^T X_i^T L \\ L^T X_i R & 0 \end{pmatrix}$$

diperoleh  $Y_i = L^T X_i R$  dan  $Y_i^T = R^T X_i^T L$ . Kita juga memiliki

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & X_i^T \\ X_i & 0 \end{pmatrix} - \Gamma \begin{pmatrix} 0 & Y_i^T \\ Y_i & 0 \end{pmatrix} \Gamma^T \right\|^2 = 2 \|X_i - LY_i R^T\|^2$$

Oleh karena itu, optimisasi menggunakan  $(L, R)$  ekuivalen dengan optimisasi menggunakan  $\Gamma$ .

Selain itu, dengan menggunakan transformasi bilinear simetris, dihasilkan suatu teorema:

**Teorema 3.1:** Fungsi objektif ADL tunggal untuk ADL2-D ialah

$$J_{ADL2-D} = \text{tr} \frac{S_b(YY^T)}{S_w(YY^T)} = \text{tr} \frac{S_b(Y^T Y)}{S_w(Y^T Y)} \quad (3.1)$$

$$J_{ADL2-D} = \text{tr} \left( \frac{R^T S_b^L R}{R^T S_w^L R} + \frac{L^T S_b^R L}{L^T S_w^R L} \right) \quad (3.2)$$

Sebelum membuktikan teorema 3.1, dari penjelasan pada bab sebelumnya, suatu kesamaan metrik alami antara matriks adalah norma Frobenius (Ye. et. al. 2004). Di bawah metrik ini kuadrat jarak dari *within-class* (dalam kelas) dan *between class* (antar kelas) dapat dihitung sebagai berikut:

$$D_w = \sum_{i=1}^k \sum_{X \in I_i} \|X - M_i\|_F^2, \quad D_b = \sum_{i=1}^k n_i \|M_i - M\|_F^2$$

$\text{trace}(MM^T) = \|M\|_F^2$ , untuk suatu matriks  $M$ , maka diperoleh

$$D_w = \text{trace} \left( \sum_{i=1}^k \sum_{X \in I_i} \|X - M_i\|_F^2 \right)$$

$$D_b = \text{trace} \left( \sum_{i=1}^k \sum_{X \in I_i} \|X - M_i\|_F^2 \right)$$



Dalam ruang berdimensi rendah, hasil dari transformasi linier  $L$  dan  $R$ , jarak *within-class* dan *between class* menjadi:

$$\bar{D}_w = \text{trace} \left( \sum_{i=1}^k \sum_{X \in \Pi_i} L^T (X - M_i) R R^T (X - M_i)^T L \right)$$

$$\bar{D}_b = \text{trace} \left( \sum_{i=1}^k n_i L^T (X - M_i) R R^T (X - M_i)^T L \right)$$

Transformasi optimal  $L$  dan  $R$  akan memaksimumkan jarak antar-kelas  $\bar{D}_b$  dan meminimumkan jarak dalam-kelas  $\bar{D}_w$ . Lebih khususnya, untuk suatu  $R$  tetap,  $\bar{D}_b$  dan

$$\bar{D}_w \text{ dapat ditulis sebagai } \bar{D}_w = \text{trace} (L^T S_w^R L), \quad \bar{D}_b = \text{trace} (L^T S_b^R L)$$

di mana

$$S_w^R = \sum_{i=1}^k \sum_{X \in \Pi_i} (X - M_i) R R^T (X - M_i)^T, \quad S_b^R = \sum_{i=1}^k n_i (M_i - M) R R^T (M_i - M)^T$$

untuk suatu  $L$  tetap,  $\bar{D}_w$  dan  $\bar{D}_b$  dapat ditulis kembali sebagai  $\bar{D}_w = \text{trace} (R^T S_w^L R)$ .

$$\bar{D}_b = \text{trace} (R^T S_b^L R)$$

di mana

$$S_w^L = \sum_{i=1}^k \sum_{X \in \Pi_i} (X - M_i)^T L L^T (X - M_i), \quad S_b^L = \sum_{i=1}^k n_i (M_i - M)^T L L^T (M_i - M)$$

Setelah  $S_w^R$ ,  $S_w^L$ ,  $S_b^R$ ,  $S_b^L$  didefinisikan di atas, maka teorema (3.1) dan (3.2) dapat dibuktikan, yakni sebagai berikut:

Matriks sebaran dalam-kelas  $S_w(YY)$ :

$$S_w(YY) = \sum_{j=1}^n \sum_{Y_i \in \Pi_j} \begin{pmatrix} 0 & (Y_i - M_j^T)^T \\ (Y_i - M_j^T) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (Y_i - M_j^T)^T \\ (Y_i - M_j^T) & 0 \end{pmatrix}$$

dengan menggantikan persamaan pada transformasi bilinear, diperoleh:

$$S_w(YY) = \sum_{j=1}^n \sum_{Y_i \in \Pi_j} \begin{pmatrix} 0 & L \\ R & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & (X_i - M_j) \\ (X_i - M_j)^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ R & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & (X_i - M_j) \\ (X_i - M_j)^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ R & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i \in \Pi_j} \begin{pmatrix} 0 & L \\ R & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} (X_i - M_j)R & 0 \\ 0 & (X_i - M_j)^T L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & R^T \\ L^T & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} 0 & (X_i - M_j) \\ (X_i - M_j)^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ R & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i \in \Pi_j} \begin{pmatrix} 0 & L \\ R & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & (X_i - M_j)RR^T \\ (X_i - M_j)^T LL^T & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} 0 & (X_i - M_j) \\ (X_i - M_j)^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ R & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i \in \Pi_j} \begin{pmatrix} 0 & L \\ R & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} (X_i - M_j)RR^T(X_i - M_j)^T & 0 \\ 0 & (X_i - M_j)^T LL^T(X_i - M_j) \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} 0 & L \\ R & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & L \\ R & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} S_w^R & 0 \\ 0 & S_w^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ R & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sama seperti penjabaran di atas, matriks sebaran antar-kelas dapat ditulis sebagai:

$$S_b(YY) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ R & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} S_b^R & 0 \\ 0 & S_b^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ R & 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh fungsi objektif ADL standar

$$\begin{aligned}
&= \text{tr} \begin{pmatrix} (R^T S_w^R R)^{-1} & 0 \\ 0 & (L^T S_w^L L)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^T S_b^R R & 0 \\ 0 & L^T S_b^L L \end{pmatrix} \\
&= \text{tr} \frac{R^T S_b^R R}{R^T S_w^R R} + \text{tr} \frac{L^T S_b^L L}{L^T S_w^L L}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan teorema 3.1, dalam kasus matriks tidak simetris yang mengakibatkan  $S_w$  dan  $S_b$  dalam ruang  $X$  terdefinisi ganda juga mengakibatkan  $S_w$  dan  $S_b$  dalam ruang  $Y$  terdefinisi ganda. Sehingga

$$J'_1 = \text{tr} \frac{S_b(YY^T)}{S_w(YY^T)} = \text{tr} \frac{R^T S_b^R R}{R^T S_w^R R}$$

$$J'_2 = \text{tr} \frac{S_b(Y^T Y)}{S_w(Y^T Y)} = \text{tr} \frac{L^T S_b^L L}{L^T S_w^L L}$$



Dalam pendekatan optimasi yang independen, untuk memperoleh  $R$  dapat dilakukan dengan cara memaksimumkan  $J_1'$  (tolak  $J_2'$ ) dan kemudian memperoleh  $L$  dengan cara memaksimumkan  $J_2'$  (tolak  $J_1'$ ). Hal tersebut tidak konsisten dalam mengoptimalkan fungsi objektif, yaitu ketika memaksimumkan  $J_1'$ ,  $J_2'$  mengalami penurunan begitu juga sebaliknya. Permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan dua teknik yaitu pertama, ketika memaksimumkan  $J_1'$ , harus menghitung  $J_2'$ . Tetapi, di sisi lain juga perlu mengetahui bagaimana caranya mengkombinasikan  $J_1'$  dan  $J_2'$ . Kombinasi sederhana yang dapat dilakukan yaitu  $J = J_1' + J_2'$  yaitu

$$J = \text{tr} \frac{\mathbf{R}^T \mathbf{S}_b^R \mathbf{R} + \mathbf{L}^T \mathbf{S}_b^L \mathbf{L}}{\mathbf{R}^T \mathbf{S}_w^R \mathbf{R} + \mathbf{L}^T \mathbf{S}_w^L \mathbf{L}} \quad (3.3)$$

Cara yang kedua yaitu bagaimana mengoptimalkan fungsi objektif. Solusi untuk memaksimumkan  $\max_R J$  secara sederhana dapat dilakukan dengan menghitung vektor eigen dari  $\mathbf{S}_w^{-1} \mathbf{S}_b$ , perhitungan yang sama seperti metode Analisis Diskriminan Linier.

Namun, fungsi objektif yang telah dijabarkan pada persamaan (3.2), tidak dapat digunakan untuk menentukan *trace* dari suatu rasio tunggal dua matriks sebaran tersebut. Hal tersebut terjadi karena fungsi objektif tersebut tidak dapat diselesaikan secara searah melalui perhitungan eigenvektor (sama seperti ADL standar). Namun, hal tersebut dapat diatasi dengan mengembangkan suatu algoritma efisien dengan menggunakan pendekatan gradien-naik. Pendekatan ini menurunkan fungsi objektif. Turunan dari fungsi matriks dikerjakan dengan menggunakan aljabar matriks dasar yang terdapat dalam buku Fukunaga (1990). Hasilnya ditunjukkan dalam Lemma berikut:

**Lemma 3.2:** Anggap  $\mathbf{P}_L = \mathbf{L}^T \mathbf{S}_b^R \mathbf{L}$ ,  $\mathbf{Q}_L = \mathbf{L}^T \mathbf{S}_w^R \mathbf{L}$ ,  $\mathbf{P}_R = \mathbf{R}^T \mathbf{S}_b^L \mathbf{R}$ , dan  $\mathbf{Q}_R = \mathbf{R}^T \mathbf{S}_w^L \mathbf{R}$ .

Turunan fungsi objektif  $J_{ADL2-D}$  pada persamaan (3.2) yakni sebagai berikut

Untuk  $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{R}}$  diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \text{tr} \frac{\mathbf{R}^T \mathbf{S}_b^L \mathbf{R}}{\mathbf{R}^T \mathbf{S}_w^L \mathbf{R}} &= 2 \mathbf{S}_b^L \mathbf{R} \mathbf{Q}_R^{-1} - 2 \mathbf{S}_w^L \mathbf{R} \mathbf{Q}_R^{-1} \mathbf{P}_R \mathbf{Q}_R^{-1} \text{ dan} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \text{tr} \frac{\mathbf{L}^T \mathbf{S}_b^R \mathbf{L}}{\mathbf{L}^T \mathbf{S}_w^R \mathbf{L}} &= 2 \sum_{k=1}^K \sum_{A_i \in \pi_k} (\mathbf{A}_i - \mathbf{M}_k)^T \mathbf{L} \mathbf{Q}_L^{-1} \mathbf{L}^T (\mathbf{A}_i - \mathbf{M}_k) \mathbf{R} \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^K (\mathbf{M}_k - \mathbf{M})^T \mathbf{L} \mathbf{Q}_L^{-1} \mathbf{P}_L \mathbf{Q}_L^{-1} \mathbf{L}^T (\mathbf{M}_k - \mathbf{M}) \mathbf{R} \end{aligned} \quad (3.4)$$



Untuk  $\frac{\partial J}{\partial L}$  diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial L} \text{tr} \frac{L^T S_b^R L}{L^T S_w^R L} = 2S_b^R L Q_L^{-1} - 2S_w^R L Q_L^{-1} P_L Q_L^{-1} \text{ dan}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \text{tr} \frac{R^T S_b^L R}{R^T S_w^L R} = & 2 \sum_{k=1}^K \sum_{A_i \in \pi_k} (A_i - M_k) R Q_L^{-1} R^T (A_i - M_k)^T L \\ & - 2 \sum_{k=1}^K (M_k - M) R Q_R^{-1} P_R Q_R^{-1} R^T (M_k - M)^T L \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dengan menggunakan rumus eksplisit gradien di atas, suatu algoritma dapat dikembangkan seperti algoritma 3.3 untuk mempermudah klasifikasi yang diaplikasikan ke dalam visualisasi komputer, berikut ini algoritma efisien dengan menggunakan pendekatan gradien-naik.

**Algoritma** ADL2-D Simetris dengan menggunakan gradien

**Input**

- Sekumpulan gambar  $\{X_i\}_{i=1}^n$  dan label dari masing-masing kelas
- Inisialisasi  $L_0, R_0$
- Frekuensi  $c$  untuk ortogonalisasi

**Inisialisasi**

- $L \leftarrow L_0, R \leftarrow R_0$
- Hitung  $M_k, k = 1, 2, \dots, K$  dan  $M$   
 $M_k$  adalah rata-rata tiap kelas sedangkan  $M$  adalah rata-rata keseluruhan
- $t \leftarrow 0$

**Lakukan**

Hitung  $S_w^R, S_w^L, S_b^R, S_b^L$

$$R \leftarrow R + \delta \frac{\partial J}{\partial R}$$

$$L \leftarrow L + \delta \frac{\partial J}{\partial L}$$

$$t \leftarrow t + 1$$

$$\text{if } (t \bmod c) = 0$$

$$R \leftarrow \text{eigenvektor dari } (S_w^L)^{-1} S_b^L$$

$$L \leftarrow \text{eigenvektor dari } (S_w^R)^{-1} S_b^R$$

endif



Output L, R

Kesehatan Masyarakat - 01131266  
Metode Analisa Diskriminan Linier

### 3.2. Aplikasi Penggunaan Metode Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi Simetris pada Suatu Contoh Data Berdimensi Tinggi

Untuk mempermudah pemahaman tentang Analisis Diskriminan Linier (ADL) dan Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi (ADL2-D), peneliti menyajikan bagaimana klasifikasi sebuah data berdimensi tinggi dengan menggunakan metode tersebut dan bagaimana perbandingannya satu sama lain. Berikut ini adalah suatu data yang merupakan data yang terdiri dari 9 kelas dan 15 titik, artinya masing-masing kelas mempunyai  $n_i = 15$  serta terdistribusi secara independen dan identik *gaussian noise* rata-rata 0 dan varians 0.01.

**Tabel 3.4:** Sekumpulan data berdimensi tinggi dengan 9 kelas dan 15 titik terdistribusi *gaussian noise* rata-rata 0, varians 0.01.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$
P <sub>1</sub>	0.7988	3.8905	0.6548	-0.6646	0.5536	1.3242	-0.5532	0.3158	-1.1613
P <sub>2</sub>	0.8968	1.3365	-1.2484	0.5582	-1.5564	-0.1265	0.2983	1.3437	-1.1098
P <sub>3</sub>	0.1379	3.1503	-0.5975	-1.1885	-0.2067	-0.7372	-1.2266	-2.2378	0.2907
P <sub>4</sub>	-1.6191	3.9939	-0.4818	-0.7755	-0.4256	0.2137	-0.1897	1.2929	-1.9102
P <sub>5</sub>	-1.6466	-1.1069	0.9834	0.271	0.4938	-0.4005	-0.3017	-0.3785	1.3148
P <sub>6</sub>	0.4287	-4.0447	1.7621	1.535	-0.8709	0.0649	0.957	0.0025	0.6653
P <sub>7</sub>	-0.982	2.1536	1.4274	-1.0523	0.0798	-1.758	-0.5334	0.8846	-0.2751
P <sub>8</sub>	-5.1064	2.7252	0.9118	0.6256	-0.5216	1.6867	-0.9011	0.5825	-0.023
P <sub>9</sub>	10.9007	4.3305	0.3268	-0.7976	-1.4139	0.3274	-0.8926	-1.6142	-0.908
P <sub>10</sub>	7.3744	-0.8533	0.0696	-0.3135	-0.3843	0.716	0.2787	-1.5037	-1.0437
P <sub>11</sub>	-4.9437	0.3456	-1.4998	-0.6022	-0.4579	1.5986	-0.7458	0.5736	0.3735
P <sub>12</sub>	9.7836	0.1098	-0.4182	1.2591	-0.2915	-2.0647	1.6035	-0.9105	0.9015
P <sub>13</sub>	10.9429	-1.133	-0.021	0.8585	-0.3012	-0.7436	0.5743	-1.6313	1.2785
P <sub>14</sub>	5.9643	-0.6831	0.2284	-2.1053	-1.5886	0.1762	0.3027	-0.3591	-0.1285
P <sub>15</sub>	-2.0985	-0.2779	-1.0082	-0.3609	1.0943	0.5278	-0.1514	-0.3976	0.6128

Zhang,  
Wang,  
Local

Sumber:  
Pan, and  
Finding  
Linear

Correlation in High Dimensional Data @cs.unc.edu

Rata-rata dari masing kelas adalah

$$\begin{array}{llll}
 M_1 = 2,0554 & M_2 = 0,92913 & M_3 = 0,0726267 & M_4 = -0,18353 \\
 M_5 = -0,386473 & M_6 = 0,05336 & M_7 = -0,09873 & M_8 = -0,26914
 \end{array}$$



$$M_9 = -0,07843$$

Rata-rata seluruhnya  $M = 0.2331296$

### Metode Analisis Diskriminan Linier

$$\text{Matriks sebaran dalam kelas: } S_w = \sum_{i=1}^c \sum_{x_k \in \Pi_i} [X_k - M_i][X_k - M_i]^T$$

$$\begin{aligned} &= [X_k - M_1][X_k - M_1]^T + [X_k - M_2][X_k - M_2]^T + [X_k - M_3][X_k - M_3]^T \\ &\quad + [X_k - M_4][X_k - M_4]^T + [X_k - M_5][X_k - M_5]^T + [X_k - M_6][X_k - M_6]^T \\ &\quad + [X_k - M_7][X_k - M_7]^T + [X_k - M_8][X_k - M_8]^T + [X_k - M_9][X_k - M_9]^T \end{aligned}$$

$$\text{Matriks sebaran antar kelas: } S_b = \sum_{i=1}^c n_i [M_i - M][M_i - M]^T$$

$$\begin{aligned} &= n_1 [M_1 - M][M_1 - M]^T + n_2 [M_2 - M][M_2 - M]^T + n_3 [M_3 - M][M_3 - M]^T \\ &\quad + n_4 [M_4 - M][M_4 - M]^T + n_5 [M_5 - M][M_5 - M]^T + n_6 [M_6 - M][M_6 - M]^T \\ &\quad + n_7 [M_7 - M][M_7 - M]^T + n_8 [M_8 - M][M_8 - M]^T + n_9 [M_9 - M][M_9 - M]^T \end{aligned}$$

$$S_w = \begin{pmatrix} -1.2566 \\ -1.1586 \\ -1.9175 \\ -3.6745 \\ -3.7020 \\ -1.6267 \\ -3.0374 \\ -3.1888 \\ 8.8452 \\ 11.0764 \\ -6.9991 \\ 12.8210 \\ 8.8874 \\ 3.9088 \\ -4.1539 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.2566 \\ -1.1586 \\ -1.9175 \\ -3.6745 \\ -3.7020 \\ -1.6267 \\ -3.0374 \\ -3.1888 \\ 8.8452 \\ 11.0764 \\ -6.9991 \\ 12.8210 \\ 8.8874 \\ 3.9088 \\ -4.1539 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 2.9614 \\ 0.4073 \\ 2.2211 \\ 3.0647 \\ -2.0360 \\ -4.9738 \\ 1.2244 \\ 0.5040 \\ 3.4013 \\ 1.1827 \\ -0.5835 \\ -1.1147 \\ -2.0621 \\ -1.6122 \\ -1.2070 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.9614 \\ 0.4073 \\ 2.2211 \\ 3.0647 \\ -2.0360 \\ -4.9738 \\ 1.2244 \\ 0.5040 \\ 3.4013 \\ 1.1827 \\ -0.5835 \\ -1.1147 \\ -2.0621 \\ -1.6122 \\ -1.2070 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0.5822 \\ -1.3210 \\ -0.6701 \\ -0.5544 \\ 0.9108 \\ 1.6895 \\ 1.3548 \\ 1.5819 \\ 0.2541 \\ -0.8412 \\ -1.5724 \\ -1.7729 \\ -0.0936 \\ 0.1558 \\ -1.0808 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5822 \\ -1.3210 \\ -0.6701 \\ -0.5544 \\ 0.9108 \\ 1.6895 \\ 1.3548 \\ 1.5819 \\ 0.2541 \\ -0.8412 \\ -1.5724 \\ -1.7729 \\ -0.0936 \\ 0.1558 \\ -1.0808 \end{pmatrix}^T$$

$$+ \begin{pmatrix} -0.4811 \\ 0.7417 \\ -1.0049 \\ -0.5919 \\ 0.4545 \\ 1.7185 \\ -0.8687 \\ 1.6306 \\ -0.6141 \\ -0.7680 \\ -0.4187 \\ 2.1279 \\ 1.0420 \\ -1.9218 \\ -0.1773 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.4811 \\ 0.7417 \\ -1.0049 \\ -0.5919 \\ 0.4545 \\ 1.7185 \\ -0.8687 \\ 1.6306 \\ -0.6141 \\ -0.7680 \\ -0.4187 \\ 2.1279 \\ 1.0420 \\ -1.9218 \\ -0.1773 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0.9400 \\ -1.1699 \\ 0.1798 \\ -0.0391 \\ 0.8803 \\ -0.4844 \\ 0.4663 \\ -0.7013 \\ -1.0274 \\ -1.2646 \\ -0.0714 \\ -0.7578 \\ 0.0853 \\ -1.2021 \\ 1.4808 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9400 \\ -1.1699 \\ 0.1798 \\ -0.0391 \\ 0.8803 \\ -0.4844 \\ 0.4663 \\ -0.7013 \\ -1.0274 \\ -1.2646 \\ -0.0714 \\ -0.7578 \\ 0.0853 \\ -1.2021 \\ 1.4808 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 1.2705 \\ -0.1802 \\ -0.7909 \\ 0.1600 \\ -0.4542 \\ 0.0112 \\ -1.8112 \\ 2.4776 \\ 0.2737 \\ 1.1702 \\ 1.5449 \\ -0.2530 \\ -0.7973 \\ 0.1225 \\ 0.4741 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.2705 \\ -0.1802 \\ -0.7909 \\ 0.1600 \\ -0.4542 \\ 0.0112 \\ -1.8112 \\ 2.4776 \\ 0.2737 \\ 1.1702 \\ 1.5449 \\ -0.2530 \\ -0.7973 \\ 0.1225 \\ 0.4741 \end{pmatrix}^T$$



$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} -0.4545 \\ 0.3970 \\ -1.1279 \\ -0.0909 \\ -0.2029 \\ 1.0557 \\ -0.4347 \\ 0.2268 \\ -0.7939 \\ 0.4817 \\ -0.6471 \\ 2.0382 \\ 0.6730 \\ 0.4014 \\ -0.0527 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.4545 \\ 0.3970 \\ -1.1279 \\ -0.0909 \\ -0.2029 \\ 1.0557 \\ -0.4347 \\ 0.2268 \\ -0.7939 \\ 0.4817 \\ -0.6471 \\ 2.0382 \\ 0.6730 \\ 0.4014 \\ -0.0527 \end{pmatrix}^T \\
 & + \begin{pmatrix} 0.5849 \\ 1.6128 \\ -1.9687 \\ 1.5620 \\ -0.1094 \\ 0.2716 \\ 1.1537 \\ 2.5511 \\ -1.3451 \\ -1.3943 \\ 0.8427 \\ -2.0642 \\ -1.3622 \\ -0.0899 \\ -0.1285 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5849 \\ 1.6128 \\ -1.9687 \\ 1.5620 \\ -0.1094 \\ 0.2716 \\ 1.1537 \\ 2.5511 \\ -1.3451 \\ -1.3943 \\ 0.8427 \\ -2.0642 \\ -1.3622 \\ -0.0899 \\ -0.1285 \end{pmatrix}^T \\
 & + \begin{pmatrix} -1.0865 \\ -1.0349 \\ 0.3655 \\ -1.8354 \\ 1.3896 \\ 0.7401 \\ -0.2003 \\ -0.3885 \\ -0.8331 \\ -2.4333 \\ 0.4483 \\ 1.1018 \\ 1.3533 \\ -0.0537 \\ 0.6876 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.0865 \\ -1.0349 \\ 0.3655 \\ -1.8354 \\ 1.3896 \\ 0.7401 \\ -0.2003 \\ -0.3885 \\ -0.8331 \\ -2.4333 \\ 0.4483 \\ 1.1018 \\ 1.3533 \\ -0.0537 \\ 0.6876 \end{pmatrix}^T
 \end{aligned}$$

16.7710	10.1990	11.0428	29.3963	3.7795	-12.2291	16.5782	16.5212	-22.2709	-33.6740	25.8538	-56.2468	-44.3457	-18.2648	10.8289
-2.2967	-0.0493	2.9790	3.7795	21.8521	18.8220	10.5077	10.3534	-41.5966	-49.5000	25.3745	-45.0511	-25.9848	-13.1799	18.8391
-14.0943	-0.4426	-12.3384	-12.2291	18.8220	35.1637	-0.8932	9.1679	-33.2519	-27.6876	10.8420	-11.8802	-1.2766	-0.4359	10.3365
7.8764	3.2604	8.1718	16.5782	10.5077	-0.8932	18.3755	9.1367	-23.8389	-36.7084	17.1111	-47.9418	-31.2035	-13.0165	9.3977
9.9961	8.0006	-2.9702	16.5212	10.3534	9.1679	9.1367	28.9250	-28.9799	-36.0241	24.5643	-46.1084	-33.7124	-15.1353	10.1683
-0.7381	-10.1237	-6.1217	-22.2709	-41.5966	-33.2519	-23.8389	-28.9799	94.5126	107.3937	-64.5347	107.3937	136.4468	-77.2523	142.3903
-8.6297	-10.0809	-17.1176	-33.6740	-49.5000	-27.6876	-36.7084	-36.0241	107.3937	136.4468	-77.2523	142.3903	93.1703	44.8470	-49.2303
8.5497	10.0837	11.5977	25.8538	25.3745	10.8420	17.1111	24.5643	-64.5347	-77.2523	55.6999	-90.0919	-63.5063	-25.9427	32.4130
-25.8330	-14.1168	-25.7797	-56.2468	-45.0511	-11.8802	-47.9418	-46.1084	108.8053	142.3903	-90.0919	183.5590	124.4398	49.3717	-50.7001
-21.3367	-13.5274	-19.5439	-44.3457	-25.9848	-1.2766	-31.2035	-33.7124	70.7981	93.1703	-63.5063	124.4398	89.1167	36.1671	-33.6943
-9.8224	-5.3628	-9.8578	-18.2648	-13.1799	-0.4359	-13.0165	-15.1353	31.4261	44.8470	-25.9427	49.3717	36.1671	23.2281	-15.8871
2.2979	2.8600	6.6418	10.8289	18.8391	10.3365	9.3977	10.1683	-42.7638	-49.2303	32.4130	-50.7001	-33.6943	-15.8871	22.8215



15.1463	2.0952	7.2088	16.7710	-2.2967	-14.0943	7.8764	9.9361	-0.7381	-8.6297	8.5497	-25.8330	-21.3367	-9.8224	2.2979
2.0952	9.0350	-0.8026	10.1990	-0.0493	-0.4426	3.2604	8.006	-10.1237	-10.0809	10.0837	-14.1168	-13.5274	-5.3628	2.8600
7.2088	-0.8026	16.0088	11.0428	2.9790	-12.3384	8.1718	-2.9702	-6.1217	-17.1176	11.5977	-25.7797	-19.5439	-9.8578	
16.7710	10.1990	11.0428	29.3963	3.7795	3.7795	2.9790	11.0428	29.3963	-41.5966	25.8338	-56.2468	-44.3457	-18.2648	
-2.2967	-0.0493	2.9790	3.7795	21.8521	-12.2291	3.7795	18.8220	35.1637	-41.5966	-45.0511	-25.9848	-13.1799	-15.1353	
-14.0943	-0.4426	-12.3384	-12.2291	18.8220	35.1637	-0.8932	9.1679	-33.2519	-27.6876	17.1111	-64.5347	44.8470	-15.8871	
7.8764	3.2604	8.1718	16.5782	10.5077	-0.8932	18.3755	28.9750	-28.9799	-36.0241	24.5643	-90.0919	36.1671	-42.7638	
9.9361	8.006	-2.9702	16.5212	10.3534	9.1679	9.1367	28.9750	94.5126	107.3937	-77.2523	124.4398	23.2281	-15.8871	
-0.7381	-10.1237	-6.1217	-22.2709	-41.5966	-33.2519	-23.8389	-28.9799	94.5126	107.3937	-77.2523	124.4398	23.2281	-15.8871	
-8.6297	-10.0809	-17.1176	-33.6740	-49.5000	-27.6876	-36.7084	-28.9799	94.5126	107.3937	-77.2523	124.4398	23.2281	-15.8871	
8.5497	10.0837	11.5977	25.8338	25.3745	10.8420	-47.9418	-46.1084	108.8053	142.3903	-90.0919	-63.5063	-25.9427	-50.7001	
-25.8330	-14.1168	-25.7797	-56.2468	-45.0511	-11.8802	-47.9418	-46.1084	108.8053	142.3903	-90.0919	-63.5063	-25.9427	-50.7001	
-21.3367	-13.5274	-19.5439	-44.3457	-25.9848	-1.2766	-31.2035	-33.7124	70.7981	93.1703	-63.5063	124.4398	89.1167	36.1671	
-9.8224	-5.3628	-9.8578	-18.2648	-13.1799	-0.4339	-13.0165	-15.1353	31.4261	44.8470	-25.9427	49.3717	36.1671	23.2281	
2.2979	2.8600	6.6418	10.8289	18.8391	10.3365	9.3977	10.1683	-42.7638	-49.2303	32.4130	-50.7001	-33.6943	-15.8871	

Nilai eigen matriks sebaran dalam-kelas ( $S_w$ ) di atas adalah

$$\text{eigenvalue}(S_w) = \begin{pmatrix} -0.0000 \\ -0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.7703 \\ 2.9668 \\ 3.9791 \\ 9.7286 \\ 13.1248 \\ 17.8440 \\ 30.8847 \\ 96.9425 \\ 603.0483 \end{pmatrix}$$

$\text{trace}(S_w) = 779.2891$ . Trace merupakan jumlah nilai eigen pada suatu matriks bujursangkar berukuran  $n \times n$  yang juga merupakan jumlah elemen-elemen diagonal matriks tersebut.

Untuk matriks sebaran antar-kelas ( $S_b$ ), karena  $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 15$  diperoleh

$$S_b = 15 \begin{pmatrix} 3.3208 & 1.2683 & -0.2925 & -0.7593 & -1.1291 & -0.3270 & -0.6048 & -0.9153 & -0.5612 \\ 1.2683 & 0.4844 & -0.1117 & -0.2900 & -0.4312 & -0.1249 & -0.2310 & -0.3496 & -0.2143 \\ -0.2925 & -0.1117 & 0.0258 & 0.0669 & 0.0994 & 0.0288 & 0.0533 & 0.0806 & 0.0494 \\ -0.7593 & -0.2900 & 0.0669 & 0.1736 & 0.2582 & 0.0748 & 0.1383 & 0.2093 & 0.1283 \\ -1.1291 & -0.4312 & 0.0994 & 0.2582 & 0.3839 & 0.1112 & 0.2056 & 0.3112 & 0.1908 \\ -0.3270 & -0.1249 & 0.0288 & 0.0748 & 0.1112 & 0.0322 & 0.0596 & 0.0901 & 0.0553 \\ -0.6048 & -0.2310 & 0.0533 & 0.1383 & 0.2056 & 0.0596 & 0.1101 & 0.1667 & 0.1022 \\ -0.9153 & -0.3496 & 0.0806 & 0.2093 & 0.3112 & 0.0901 & 0.1667 & 0.2523 & 0.1547 \\ -0.5612 & -0.2143 & 0.0494 & 0.1283 & 0.1908 & 0.0553 & 0.1022 & 0.1547 & 0.0948 \end{pmatrix}$$



$$S_b = \begin{pmatrix} 49.8117 & 19.0249 & -4.3873 & -11.3895 & -16.9365 & -4.9055 & -9.0713 & -13.7293 & -8.4180 \\ 19.0249 & 7.2663 & -1.6757 & -4.3501 & -6.4687 & -1.8736 & -3.4647 & -5.2437 & -3.2152 \\ -4.3873 & -1.6757 & 0.3864 & 1.0032 & 1.4917 & 0.4321 & 0.7990 & 1.2092 & 0.7414 \\ -11.3895 & -4.3501 & 1.0032 & 2.6042 & 3.8725 & 1.1217 & 2.0742 & 3.1392 & 1.9248 \\ -16.9365 & -6.4687 & 1.4917 & 3.8725 & 5.7586 & 1.6679 & 3.0843 & 4.6681 & 2.8622 \\ -4.9055 & -1.8736 & 0.4321 & 1.1217 & 1.6679 & 0.4831 & 0.8934 & 1.3521 & 0.8290 \\ -9.0713 & -3.4647 & 0.7990 & 2.0742 & 3.0843 & 0.8934 & 1.6520 & 2.5003 & 1.5330 \\ -13.7293 & -5.2437 & 1.2092 & 3.1392 & 4.6681 & 1.3521 & 2.5003 & 3.7841 & 2.3202 \\ -8.4180 & -3.2152 & 0.7414 & 1.9248 & 2.8622 & 0.8290 & 1.5330 & 2.3202 & 1.4226 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen matriks sebaran dalam-kelas ( $S_w$ ) di atas adalah

$$eigenvalue(S_b) = \begin{pmatrix} -0.0000 \\ -0.0000 \\ -0.0000 \\ -0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 73.1691 \end{pmatrix}$$

$trace(S_b) = \text{jumlah elemen diagonal}(S_b) = 73.1691$ .

$$\text{Fungsi objektif optimum ADL} = \frac{\text{tr}(S_b)}{\text{tr}(S_w)}$$

$$= \frac{73.1691}{779.821}$$

$$= 0.093828$$

Untuk menggambarkan hasil klasifikasi Analisis Diskriminan Linier harus mentransformasi setiap kelas dengan optimum transformasi linier berikut:

$$Y = G^T X \quad (3.3)$$

di mana  $G$  adalah matriks berukuran  $n \times m$  dan vektor-vektor kolomnya saling bebas linier. Namun, karena seluruh matriks sebaran  $S_w$  dan  $S_b$  merupakan matriks kovarians,  $S_w$  dan  $S_b$  dalam ruang  $Y$  dapat dihitung dari  $S_w$  dan  $S_b$  dalam ruang  $X$ , yakni:

$$S_w(Y) = G^T S_w(X) G$$

$$S_b(Y) = G^T S_b(X) G$$

## Metode Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi

Aplikasi menggunakan metode Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi lebih mudah diterapkan dengan mengikuti algoritma 2.2

Sesuai dengan algoritma 2.2,

Dari data yang diperoleh pada tabel 3.2, diperoleh

### 1. Inisialisasi

$$M_1 = 2,0554 \quad M_2 = 0,92913 \quad M_3 = 0,0726267 \quad M_4 = -0,18353$$

$$M_5 = -0,386473 \quad M_6 = 0,05336 \quad M_7 = -0,09873 \quad M_8 = -0,26914$$

$$M_9 = -0,07843$$

### 2. Rata-rata seluruhnya $M = 0.2331296$

### 3. $R_0$ = suatu vektor acak $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ di mana banyaknya baris matriks $R$ sama dengan banyaknya kolom pada matriks $(X - M_i)$ .

### 4. untuk iterasi dari $j = 1$ sampai dengan $I$ , $I$ merupakan simbol yang menyatakan banyaknya iterasi, algoritma dapat dilakukan sebanyak pengguna inginkan untuk menghasilkan klasifikasi yang baik

### 5. Matriks sebaran dalam-kelas jika $L$ tetap

$$S_w^R \leftarrow \sum_{i=1}^k \sum_{x \in I_i} (X - M_i) R_{j-1} R_{j-1}^T (X - M_i)^T$$

$$S_w^R = (X - M_1) R_{j-1} R_{j-1}^T (X - M_1)^T + (X - M_2) R_{j-1} R_{j-1}^T (X - M_2)^T + \dots + (X - M_9) R_{j-1} R_{j-1}^T (X - M_9)^T$$

### Matriks sebaran antar-kelas jika $L$ tetap

$$S_b^R \leftarrow \sum_{i=1}^k n_i (X - M_i) R_{j-1} R_{j-1}^T (X - M_i)^T$$



$$S_b^R = n_1 (X - M_1) R_{j-1} R_{j-1}^T (X - M_1)^T + n_2 (X - M_2) R_{j-1} R_{j-1}^T (X - M_2)^T + \dots \\ + n_9 (X - M_9) R_{j-1} R_{j-1}^T (X - M_9)^T$$

6. Menghitung vektor eigen dari  $\{\phi_i^L\}_{i=1}^{l_1}$  dari  $(S_w^R)^{-1} S_b^R$

7. Dari perhitungan pada algoritma ke-6 menghasilkan matriks eigen vektor sebagai berikut:

$$L_j \leftarrow \{\phi_1^L, \dots, \phi_{l_1}^L\}$$

8. Matriks sebaran dalam-kelas untuk suatu  $R$  tetap ialah

$$S_w^L \leftarrow \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \Pi_i} (X - M_i)^T L_j L_j^T (X - M_i)$$

$$S_w^L = (X - M_1) L_1 L_1^T (X - M_1)^T + (X - M_2) L_1 L_1^T (X - M_2)^T + \dots \\ + (X - M_9) L_1 L_1^T (X - M_9)^T$$

Matriks sebaran antar-kelas untuk suatu  $R$  tetap ialah

$$S_b^L \leftarrow \sum_{i=1}^k n_i (X - M_i) L_1 L_1^T (X - M_i)^T$$

$$S_b^L = n_1 (X - M_1) L_1 L_1^T (X - M_1)^T + n_2 (X - M_2) L_1 L_1^T (X - M_2)^T + \dots \\ + n_9 (X - M_9) L_1 L_1^T (X - M_9)^T$$

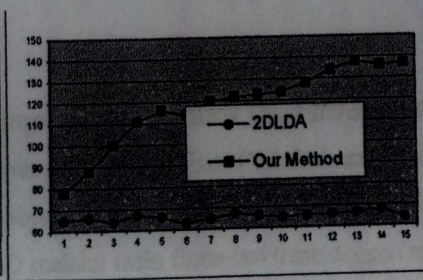
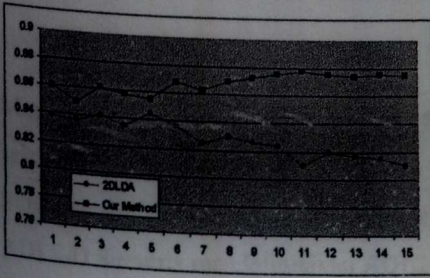
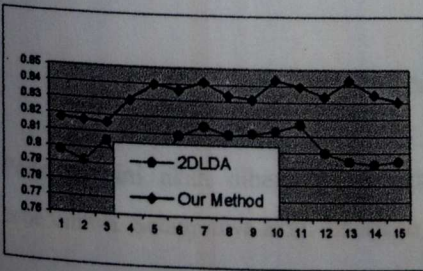
9. Menghitung eigen vektor  $l_2$  pertama  $\{\phi_i^R\}_{i=1}^{l_2}$  dari  $(S_w^L)^{-1} S_b^L$

10. Dari perhitungan pada algoritma ke-6 menghasilkan matriks eigen vektor sebagai berikut:

$$R_j \leftarrow \{\phi_1^R, \dots, \phi_{l_2}^R\}$$

11. Setelah seluruh iterasi selesai hingga iterasi ke- $I$  maka akan diperoleh keluaran berupa matriks  $L$  dan  $R$ .

Gambar berikut ini menunjukkan perbedaan klasifikasi dengan menggunakan Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi dan Analisis Diskriminan 2-Dimensi Simetris dengan melakukan iterasi sebanyak 15 kali. Untuk menghasilkan gambar tersebut, pertama peneliti menghitung keakuratan klasifikasi dan nilai fungsi objektif menggunakan bagan validitas yakni dengan cara matriks data dibagi menjadi 5 bagian, 4 sebagai himpunan untuk pelatihan dan 1 untuk pengujian data. Peneliti mengambil nilai  $k = 5, 8, 12$ . Untuk ADL2-D peneliti menghitung fungsi objektif pada persamaan (3.2). Warna biru pada gambar menyatakan klasifikasi dengan menggunakan ADL2-D Simetris, sedangkan warna merah menyatakan klasifikasi dengan ADL2-D.



(a)  $k = 5$



## BAB 4

### KESIMPULAN DAN RISET LANJUTAN

Pada bab ini akan diberikan kesimpulan yang diperoleh dari hasil penelitian pada bab sebelumnya. Selanjutnya akan diberikan saran untuk penelitian lebih lanjut.

#### 4.1 Kesimpulan

Masalah keraguan yang terdapat pada fungsi objektif Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi sebelumnya dapat diselesaikan dengan pendekatan Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi Simetris yang menghasilkan suatu fungsi objektif lengkap. Sebelum menemukan fungsi tersebut, ADL2-D Simetris mendefinisikan ADL2-D melalui rasio formulasi trase dengan matriks sebaran dalam-kelas ( $S_w$ ) dan matriks sebaran antar-kelas ( $S_b$ ) yang lengkap. Fungsi objektif lengkap tersebut ialah

$$J = \text{tr} \frac{\mathbf{R}^T \mathbf{S}_b^R \mathbf{R}}{\mathbf{R}^T \mathbf{S}_w^R \mathbf{R}} + \text{tr} \frac{\mathbf{L}^T \mathbf{S}_b^L \mathbf{L}}{\mathbf{L}^T \mathbf{S}_w^L \mathbf{L}}$$

Selain itu, suatu algoritma komputasional efektif diberikan untuk memecahkan fungsi objektif pada ADL2-D Simetris. Jika diaplikasikan pada suatu data berdimensi tinggi, akan terlihat bahwa ADL2-D Simetris memberikan hasil yang lebih baik dan akurat dibandingkan ADL2-D.

#### 4.2 Riset Lanjutan

Penelitian ini merupakan salah satu jenis metode analisis diskriminan bilinear. Dibutuhkan penelitian lebih lanjut untuk mengekstraksi fitur dan klasifikasi pola dalam visualisasi komputer dan pelatihan mesin. Tensor yang didasarkan pada ADL dapat digenerasikan menggunakan pendekatan dalam penelitian ini untuk mengatasi masalah analisis diskriminan multi-linier.



## DAFTAR PUSTAKA

- Fukunaga, K. 1990. *Introduction to Statistical Pattern Classification*. San Diego, California, USA : Academic Press.
- Horn, R. A. and Johnson, C. R. 1985. *Matrix Analysis*. Cambridge, U.K: Cambridge University Press.
- Jain, Anil, K., Fellow, Duin, Robert, P.W., and Jianchang Mao, Jianchang., Senior Member, IEEE. Statistical Pattern Recognition: A Review. In *IEEE Transactions On Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 22, No. 1, Januari 2000.
- Li, M. and Yuan, B. 2005. 2d-lda: A novel statistical linear discriminant analysis for image matrix. *Pattern Recognition Letters*, **26**(5): hal. 527–532.
- Luo, D., Ding, C., and Huang, H. 2007. *Symmetric Two Dimensional Linear Discriminant Analysis (2DLDA)*. University of Texas at Arlington Press.
- Song, F., Liu, S., and Yang, J. 2005. Orthogonalized fisher discriminant. *Pattern Recognition*, **38**(2): hal. 311–313.
- Theodoridis, Sergios. and Koutroumbas, Kontantinos. 2003. *Pattern Recognition*. 2<sup>nd</sup> Edition. New York, USA: Academic Press.
- Xiang, Zhang, Pan, Feng, Wang, Wei. 2008. Finding Local Linear Correlation in High Dimensional Data. *Correlation Linear*, **23**(1): hal. 1259-1269.
- Xiong, H., Swamy, M., and Ahmad, M. 2005. Two-dimensional fld for face recognition. *Pattern Recognition*, **38**(7): hal. 1121–1124.
- Yang, J., Frangi, F., and Zhang, D. 2003. Uncorrelated projection discriminant analysis and its application to face image feature extraction. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, **17**(8): hal. 1325–1347.
- Ye, J., Janardan, R., and Li, Q. 2004. Two-Dimensional Linear Discriminant Analysis. *Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS 2004)*, **17**: hal. 1569–1576
- Yu, Senhua., and Dasgupta, Dipankar. 2008. *Conserved Self Pattern Recognition Algorithm with Novel Detection Strategy Applied to Breast Cancer Diagnosis*. Memphis, USA: University of Memphis Press.
- [http://www.wikipedia.org/html/pattern\\_recognition.htm](http://www.wikipedia.org/html/pattern_recognition.htm). Tanggal akses: 22 Februari 2010.